線形代数

理一 38 組　野村

目 次

まえがき

数２のシケプリです．結構丁寧に書いたつもりですが，もしかすると書き間違いをしているところがあるかもしれないので，あやしいところや本当に間違ってるところがあったら教えてください．もしかするとシケプリが長いと文句を言う人がいるかもしれないですが，それならこのシケプリなんか読まずに教科書を読むか，問題集でも買って問題の解き方だけを覚えるなりしてください．たまに証明を省略しているところがありますが，ちょっと書くのが面倒だったので許してください．また例は結構載せたつもりですが，問題は一問も載っていません．問題をバリバリ解きたい方は問題集の購入をお勧めします。線形代数は来学期もやらされるので一冊買ったからって損はしないと思います．あとみんなが気になるであろう過去問は探したけど見つからなかったので勘弁してください．こんな対したことない文章ですが，無駄に時間がかかっているので読んでくれたらとってもうれしいのですが...（なんかまとまりがないまえがきになってしまった）

1　連立一次方程式

1.1　掃き出し法-具体的な連立一次方程式の解法

たくさんの連立一次方程式を解くのは面倒なものですが, それを機械的に計算することで解を得る方法が掃き出し法です. これは具体例を見たほうが分かりやすいので, 具体例として以下の連立一次方程式を解こうと思います. すべての式が $... = 0$ の形になっているのは, まず一番基本的で簡単そうな連立一次方程式を解いて感じをつかんでから一般論に持っていくためです.（まあ最初から一般論をやってもいいのですが一応ゆっくりやっていきましょう. また, こういう連立一次方程式を **斉次方程式** といいます）
例

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \quad\quad x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

この連立方程式が与えられたとき, たいてい次の様な感じで解くと思います.

x_1 を 3,4 行目の式から消去して

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \quad\quad x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad\quad 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

x_2 を 1,3,4 行目から消去して

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0, \\ \text{完全に消えた}, \end{cases}$$

x_3 を 1,2 行目から消去して

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0, \\ \text{完全に消えた}, \end{cases}$$

ここまできたら簡単にこの方程式の解が $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -t, 2t, t)$ となることが分かります.（$x_4 = t$ とおきました. もちろん t は任意）

では, まずこの連立一次方程式を行列で表現してみましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

そして, 次に先ほどの変形の途中の式を行列で表現してみましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ \qquad 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0, \\ \text{完全に消えた}, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0, \\ \text{完全に消えた}, \end{cases}$$

さて行列の成分のみに注目してみると, ある行を他の行に足したり引いたりすることにより, 最終的に単位行列に近づくように行列を変形していくことで簡単な連立方程式まで変形できることが分かります.

つまり連立方程式を解くときは以下の３つの操作

$$\begin{cases} \text{行列Aのi行目をスカラー倍する}, \\ \text{行列Aのi行目をj行目に加える}, \\ \text{行列Aのi行目とj行目を交換する}, \end{cases}$$

をすればよいことが分かります. これを **行の基本変形** と言います. 上で行を列と読み替えたときの操作を **列の基本変形** といいます. もちろん **連立一次方程式を解くときは行の基本変形のみ使います.**

ではすべての式が $\ldots = 0$ という形になっていない, 一般的な場合の連立一次方程式について考えてみましょう.（このような方程式を **非斉次方程式** をいいます）ということで具体例として以下の連立一次方程式を解こうと思います.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

この連立方程式が与えられたとき, たいてい次の様に解くと思います.

x_1 を 2,3 行目の式から消去して $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

2,3 行目を入れ替えて $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_3 = 1 \end{cases}$

x_2 を 1 行目の式から消去して $\begin{cases} x_1 \quad - 5x_3 = -7, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_3 = 1 \end{cases}$

x_3 を 1,2 行目の式から消去して $\begin{cases} x_1 \quad = -2, \\ x_2 \quad = 1, \\ x_3 = 1 \end{cases}$

つまり $(x_1, x_2, x3) = (-2, 1, 1)$ となることが分かります.

では先ほどと同じように連立方程式を行列で表してみましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

同様に途中式も行列で表現してみましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 3, \\ \qquad x_3 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad - 5x_3 = -7, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 3, \\ \qquad x_3 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad = -2, \\ \quad x_2 \quad = 1, \\ \qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

ここでいちいち (x_1, x_2, x_3) と書くのが面倒なので, 必要な成分だけ行列に書いて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

と略して書いたりします.（というか普通計算するときは楽なのでこうやって書いて解く方がよい）この列が一つ増えた行列のことを **拡大係数行列** といいます.

さて以上の具体的な計算によって分かることは, 行列（または拡大係数行列）に行の基本変形をほどこすことによって行列を最終的に単位行列にできるだけ近づくように変形すれば解が得られることが分かります. このようにして連立一次方程式を解く方法を **掃き出し法** といいます. まぁ名前の割りにたいしたことじゃありませんね.

まとめ

連立一次方程式を具体的に解くには（拡大係数）行列を **行** 基本変形のみ[a]によって単位行列に近づくように変形し, 簡単になった連立一次方程式を解く.

[a]列の基本変形をすると何が起きるのか考えてみれば, 列の基本変形をしてはいけない理由は分かると思います

1.2 行列の基本変形と基本行列

前に述べたように行列のとは, 掃き出し法によって行列を変形したときに用いた変形の仕方のことです. もう一度どんな変形であったかを書いておくと

$$\begin{cases} \text{1.行列Aのi行（列）目をスカラー倍する,} \\ \text{2.行列Aのi行（列）目をj行（列）目に加える,} \\ \text{3.行列Aのi行（列）目とj行（列）目を交換する,} \end{cases}$$

この行列のをある行列A行うことを, 特定の行列を行列Aにかけることによって表現することを考えます. すると次のように対応します.

$$1. \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & ... & \lambda & ... & ... & : \\ : & ... & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & ... & ... & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{対角成分は } (i,i) \text{ 成分だけ } \lambda)$$

$$2. \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & : \\ : & 0 & 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & : \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & : & ... & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & 0 & ... & ... & ... & 0 & ... & : \\ : & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & : \\ : & ... & 0 & ... & ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{（単位行列の(j,i)成分を1に変えた）}$$

$$3. \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & : \\ : & 0 & 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & : \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & : & ... & ... & ... & ... & ... & : \\ : & ... & 0 & ... & ... & ... & 0 & ... & : \\ : & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & : \\ : & ... & 0 & ... & ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

そしてこれらの行列の基本変形に対応する行列のことを **基本行列** といいます. このとき基本行列を左からかけることが行の基本変形に対応し, 右からかけることが列の基本変形に対応しています.

1.3 行列の階数と連立一次方程式との関連

具体的な連立一次方程式の解き方は分かったので, 今度はもっと一般的にその解について調べていきましょう. つまりある一次方程式が与えられたとき, 解を一つしか持たないのか, それともたくさん持つのかを調べます. ということでまずは, 具体的な連立一次方程式の解き方の章でやったように, 次のような方程式を考えることにしましょう.

$$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ : & & & : \\ : & & & : \\ a_{m1} & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ : \\ 0 \end{pmatrix}$$

そしてこの方程式に行の基本変形を行っていくと次のような方程式に変形されることが分かります.

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * & * & * & * & * \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ : \\ : \\ : \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ : \\ : \\ : \\ : \\ 0 \end{pmatrix}$$

さてこのとき, 行列の階数を, 上の行列での階段の数（角にある1の数）で定義します.(*は何でもよいです.) これを行列Aのの階数といい,$rankA$と表します.[1] そして行基本変形によってこの段階まで変形された行列を **簡約な行列** といいます. 例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は2となります.

さて, このとき独立な一次方程式（他の一次方程式を足したり引いたりしもても0にならない方程式のこと）の数が$rankA$と一致することが分かります. なぜなら, もしも足したり引いたりすることによって, ある方程式が他の方程式によって表されたりすると行列の基本変形を行ったときに必ず消えてしまうからです. 例えば

$$\begin{cases} x_1+x+x3=0, \\ x_1+3x+x3=0, \\ 2x_1+4x+2x3=0, \end{cases}$$

の3本の方程式があったとします. これを行列で表すと

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となります. このとき3行目から,1行目と2行目を引くと3行目はすべて0となります. これは,1番目の方程式と2番目の方程式を足すと3番目の方程式になることに対応しています. さらに3行目から1行目と2行目を引いた2行目から1行目を引くと

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるので,1行目の式と2行目の式は独立である

[1] これが行の基本変形の順によらないこと（つまり一意に定まることの証明は省略します. まぁ行の基本変形で連立方程式の解が変わるはずがないので, $rankA$が行の基本変形に対して不変なのは明らかですが...）

ことが分かり, 結局独立な方程式は 2 本しかなかったことが分かります. またこの行列の階数は定義から 2 であることが分かるので, 確かにこれは独立な方程式の本数に一致することが分かります.

さて独立な 1 次方程式が一つ増えると, 変数同士の関係式が 1 つ増えるために自由に動ける変数が一つ減ります.（例えば変数 x, y, z があったとき,$x+y+z=0$ という関係式があるとします. このとき x,y を決めると, 自動的に z が決まってしまうので, 自由に動ける変数は 1 つ減って 2 つになっていることが分かります.）ということは, 自由に動ける変数は $rankA$ こ分だけ減って $n-rankA$ こになることが分かります.

まとめ

階数は行列に行基本変形をほどこして簡約化したときの角にある 1 の数で定義される. そして階数と連立一次方程式の解における自由な変数の数と密接に関連している（自由な変数は $n-rankA$ こである）.

1.4　連立方程式の解の集合を調べるための準備

さきほどは, 連立方程式の解と階数の関係について考えたのですが, この章ではそれをもう少し掘り下げていきましょう. その話を円滑に進めるために, まず **線形部分空間**（**部分ベクトル空間** ともいう）や, 基底, 次元を定義します. 線形部分空間 W は $\boldsymbol{R}\hat{}\boldsymbol{n}$ に属するベクトルの組
$[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_k}]$
に対して, このベクトルの定数倍の和の全体, つまり
$W=[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\lambda_2\boldsymbol{a_2}+.....+\lambda_k\boldsymbol{a_k}](\lambda_1..\lambda_k$ は実数で,0 でもよい. またこういう和のことを **線形結合** という)
として定義します. これを $W=Span[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_k}]$ と表します.

例えば 3 次元のベクトルの, 部分空間ベクトルの例としては,$W=Span[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}]$
などがあります. この場合はもちろん xy 平面ですね.

では次に **線形独立**（**一次独立** ともいう）を定義します. ベクトルの組 $[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_k}]$ が一次独立であるというのは $\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\lambda_2\boldsymbol{a_2}+.....+\lambda_k\boldsymbol{a_k}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$ です. この式はどういうことかというと, 互いに互いを表すことができないということです.
例えば $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は一次独立です.（さっきの式にあてはめれば明らかですね）

逆に一次独立ではない場合, つまりある $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$（少なくとも 1 つは 0 でない）があってこのとき $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + ... + \lambda_k \boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$ となるときのことを **一次従属**（**線形従属** ともいう）といいます.

では次に基底を定義します. 基底は線形部分空間に属する一次独立なベクトルの組で, このベクトルの線形結合によって線形部分空間のすべての要素を表せるもののことを **基底** といいます.

例えば三次元では,$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ といった 3 つの一次独立なベクトルですべての三次元ベクトルが表されます.

もちろん他にも,$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ などのように基底の組はいくらでもあるのでご注意ください.

次に次元ですが, 線形部分空間の基底の本数で,$dimW$ と表します.（dimension の頭 3 文字）もし W の基底が m 組のベクトルであったら,W の次元は $dimW = m$ となります. 基底の取り方は無数にあるのですが, どんな基底をとっても必ず次元は一意に定まります.（この証明は省略します.）
以上で準備は終わりです.

1.5　斉次連立方程式の解の集合

まずは,$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ という連立一次方程式の解を集めた集合について考えます.（A は,m 行 n 列 の行列とする）この $\boldsymbol{x}$ の集合のことを **核** といい,$KerA$ と表します.（ker は kernel の頭三文字です）
まずはこの集合の次元と基底を求めることが目標です（が今までの議論で結構明らかなのですが...）.

「1.3 行列の階数と連立方程式との関連」の章で議論したように,$rankA$ の分だけ自由に動ける変数が減って, 結局自由に動ける変数は $n - rankA$ ことなっているので A の核の次元 $dim(KerA) = n - rankA$ となっていることが分かります. また,A の核の基底ですが, これは連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解けば求めることができます.
具体例でこのことをみてみましょう.

「1.1 掃き出し法ー具体的な連立一次方程式の解法」の章で一番最初に解いた連立一次方程式を例にとってみましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを行の基本変形で変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と変形されるのでした. この簡約な行列の階数は定義から 3 であることが分かります. そして解の集合は,

$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ （ただし t は任意の実数とします）

つまり, この場合は核の基底として $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れることが分かり, 次元は 1 であることも分かります. これで $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という連立一次方程式の解の集合である $KerA$ がどういう集合であるかが完全に分かりました.

まとめ

核（$KerA$）の次元は $n - rankA$ と一致し, 基底は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くことで得られる.

1.6 非斉次連立方程式について

先程は斉次連立一次方程式の解の集合について考えましたが, 今度は非斉次連立方程式について考えます. つまり $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の方程式について考えたいのですが, 先程は $\boldsymbol{x}$ に注目したのですが, 今度は $\boldsymbol{y}$ に注目します.

$\boldsymbol{x}$ が自由に動いたとき,$\boldsymbol{y}$ が動く範囲を考えます. この $\boldsymbol{y}$ の集合を A の **像** といい,ImA と表します.（Im は image の頭二文字です）ImA を調べるために $A\boldsymbol{x}$ を,（少々技巧的ですが）

$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + ... + x_n\boldsymbol{a_n}$ と変形します. ただし,$A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_n})$ とします.（$\boldsymbol{a_1}$ などは列ベクトルです）

このように変形することで $\boldsymbol{y}$ の集合である像の基底は,$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_n}$ の中で一次独立なベクトルを最大本数とったものだと分かります. また像の次元は $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_n}$ の中で一次独立なベクトルの本数に一致することがわかります. よって像の基底や次元を調べるには $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_n}$ の一次独立性を調べればよいことが分かります.

これを調べるのに便利な定理があります. それは, 列ベクトル間の関係式は, 行基本変形をほどこしても変わらないという定理です. どういうことかというと, はじめに行列 $A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ があって $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_3}$ という関係式を満たしていたとします. このとき行基本変形を A にほどこして $B = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3})$ となったとします. このとき $\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{b_3}$ という関係式を満たしているということです. ただしこの列ベクトル間の関係式は列基本変形については不変ではありません. もしも列を入れ替えたら明らかに上のような関係式は成り立ちませんよね！(この証明もあとでやることにします.)

さてこの定理を認めると一次独立な行ベクトルの本数と, 一次独立な列が一致することが分かります. なぜこうなるかを具体例で見てみましょう. 再び「1.1 掃き出し法ー具体的な連立一次方程式の解法」の章で一番最初に解いた連立一次方程式を例にとってみましょう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを行の基本変形で変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この簡約な行列（$B = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}, \boldsymbol{b_4})$ とおきます.$\boldsymbol{b_1}$ などは列ベクトルです）を見てみると, 明らかに $\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{b_4}, \boldsymbol{b_2} = -2\boldsymbol{b_4}$ が成り立っています. このとき先程の定理から, もとの行列（$A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}$）とおきます.$\boldsymbol{a_1}$ などは列ベクトルです）でも $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_2} = -2\boldsymbol{a_4}$ が成り立っています. つまり $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ は一次独立だが, $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}$ は一次従属であることが分かります. つまり, 簡約な行列に変形したときに角に 1 が出てきた位置にもともとあった行列での列ベクトルは一次独立で（上の例では $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ の一次独立性に対応）, このベクトルたちに他の列ベクトルを加えると一次従属となります.（上の例で $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ に $\boldsymbol{a_4}$を加えると一次従属になることに対応）このとき簡約な行列に変形したときに角に 1 が出てきた個数は一次独立な列ベクトルの本数に一致していることが分かります.

ところで簡約な行列に変形したときに角に 1 が出てきた個数はまさに $rankA$ の

定義であり, 一次独立な行ベクトルの本数です. 以上の議論から

$$rankA = \text{一次独立な行ベクトルの本数} = \text{一次独立な列ベクトルの本数}$$

となります.[2]

さて先程の長い議論から本題であった $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ という方程式における $\boldsymbol{y}$ 全体の集合である像の次元と基底の求め方は結局,次元 $= rankA$, 基底は簡約な行列に変形したときに角に 1 が出てきた位置にもともとあった行列での列ベクトルの組であることが分かります.[3]先程の議論で用いた

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と変形されることから $dim(ImA) = rankA = 3$ であり, 基底としては, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れます. 長くなったのでここで一区切りつけます.

まとめ

$rankA = $ 一次独立な行ベクトルの本数 $=$ 一次独立な列ベクトルの本数. よって行列 A の像の次元は $rankA$ であり, 基底は行列 A を簡約な行列に変形したとき, 角に 1 が出てきた位置にもともとあった行列での列ベクトルの組である. ($\leftarrow$ まわりくどいね...)[a]

[a]念のためですが, 行基本変形に対して列ベクトルが張る空間は一般に不変ではありません. だから角に 1 が出てきた位置にもともとあった行列での列ベクトルを用いるのです.

1.7 非斉次連立一次方程式の可解性の判定

この章では非斉次連立一次方程式が解を持つかどうかを簡単に判定する方法を考えます.

[2]この議論が一般に通用するのは明らかでしょう.

[3]$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + ... + x_n\boldsymbol{a_n}$ を思い出しましょう

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ という連立方程式は, 先程の章で説明したように $A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a_1}+x_2\boldsymbol{a_2}+...+x_n\boldsymbol{a_n}$ と変形できることから,

$$x_1\boldsymbol{a_1}+x_2\boldsymbol{a_2}+...+x_n\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{b}$$

となります. この式はどういうことを表しているかというと,$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a_1},...,\boldsymbol{a_n}$ の一次結合で表すことができれば解を持つ, つまり, $\boldsymbol{a_1},...,\boldsymbol{a_n},\boldsymbol{b}$ が一次従属なら解を持つことが分かります. つまり,$rankA=rank(A|\boldsymbol{b})$ が成り立てばよいことが分かります. ($(A|\boldsymbol{b})$ は拡大係数行列です!)

また, 非斉次連立方程式の一つの解を $\boldsymbol{x_0}$ とおくと,$A\boldsymbol{x_0}=\boldsymbol{b}$ がなりたつので,$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ から辺々引いて $A\boldsymbol{x-x_0}=\boldsymbol{0}$ となります. よって $\boldsymbol{z}\in KerA$ とすれば,$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解である $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{z}$ と表されることが分かります.

少々話が変わりますが, 前の章の議論から $dim(KerA)=n-rankA, dim(ImA)=rankA$ であったのでこれをまとめて

$$dim(KerA)+dim(ImA)=n$$

という公式が成立します. これを次元定理といいます.

まとめ

非斉次連立一次方程式が解を持つ $\Leftrightarrow rankA=rank(A|\boldsymbol{b})$
次元定理:$dim(KerA)+dim(ImA)=n$

この章全体のまとめ

- 連立一次方程式の具体的解法
　　$\longrightarrow$ 行の基本変形を用いて（拡大係数）行列を簡約な行列まで持っていく

- 基本行列
  $\longrightarrow$ 行の基本変形や, 列の基本変形と対応

- 行列の階数
  $\longrightarrow$ 一次独立な列ベクトルの本数
  $\longrightarrow$ 一次独立な行ベクトルの本数
  $\longrightarrow$ 像の次元, つまり $dim(ImA)$

- 行列 A の核
  $\longrightarrow A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ における $\boldsymbol{x}$ の集合
  $\longrightarrow$ 核の次元 $dim(KerA) = n - rankA$
  $\longrightarrow$ 核の基底は行の基本変形により連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解いて求める

- 行列 A の像
  $\longrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ における $\boldsymbol{y}$ の集合
  $\longrightarrow$ 像の次元は $dim(ImA) = rankA$
  $\longrightarrow$ 像の基底は行列 A を行の基本変形で簡約な行列までもっていき, 基底は簡約な行列に変形したときに角に 1 が出てきた位置にもともとあった行列での列ベクトルである

- 非斉次連立一次方程式
  $\longrightarrow$ 解を持つには $rankA = rank(A|\boldsymbol{b})$ が成立することが必要十分
  $\longrightarrow$ 解は $(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の一つの解$\boldsymbol{x_0}) + (KerA$ に属するベクトル$\boldsymbol{z})$

- 次元定理
  $\longrightarrow dim(KerA) + dim(ImA) = n$

2　行列の基本的な演算

実は今まで行列の足し算や掛け算や定数倍について何も定義せずに議論を進めてきたのでそろそろ定義しようと思います

2.1　行列の足し算, スカラー倍, 掛け算の定義

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{としたとき}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

また $k(\in \boldsymbol{R})$ としたとき,

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

また掛け算 AB は A の列の数と B の行の数,A の行の数と B の列の数が等しいときのみ定義され,A を (m,n) 行列として（$\leftarrow m$ 行 n 列 の意）

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \dots + a_{1n}b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \dots + a_{mn}b_{nm} \end{pmatrix}$$

まぁ知ってのとおり

$$\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

といった感じで計算します. なぜこのように定義するのか ？ と思うかもしれませんが, それは線形写像との対応がいいからと説明するのが一番すっきりしてると思うので, 線形写像の章でそのことに触れることにします.

さて, 行列の演算を上のように定めたのですが, これは以下のような性質を満たします.

- 和の性質

  交換法則 $A + B = B + A$ が成立

  結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$

  零元の存在つまり $A + 0 = A$ なる 0 が存在

  逆元の存在つまり $A + (-A) = 0$ なる行列 A が存在

- 積の性質
  結合法則 $(AB)C = A(BC)$
  単位元の存在つまり $AE = EA = A$ なる行列 E が存在

- 和と積
  分配法則 $A(B+C) = AB + AC, (A+B)C = AC + BC$ が成立

証明は簡単なので略します. この性質により行列について基本的な計算ができることがわかります.
普通の計算と違う重要な点は

- 一般に $AB = BA$ は **成立しない**
- 一般に $AB = 0 \Rightarrow A = 0 or B = 0$ は **成立しない**

ということが大事ですかね.

2.2 シグマ計算

行列の計算をシグマ記号を用いて書くことがあります. それに慣れましょう. 以下具体例です.

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$(ただし $i = 1, ..., m$)
- $AB = C \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$(ただし $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$)
  (行列 $A = (a_{ij})$, (ただし $i = 1, .., m, j = 1, .., n$) と成分を省略して表すことがあるので覚えておいてください)

などです.
少々違う話なのですが, 単位行列 $E = (\delta_{ij})$, (ただし $i, j = 1, .., n$) と表すことがあります. (もちろん単位行列は対角成分がすべて 1 でそれ以外がすべて 0 の行列です.) この δ はクロネッカーのデルタといい,
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ (i = j), \\ 0 \ (i \neq j), \end{cases}$$
と定義します. よく使う省略記号なのでこれも覚えておいてください.

2.3　転置行列の定義と性質

行列 $A=(a_{ij}),(i=1,..m,\ j=1,..,n)$ の **転置行列**（${}^tA$ もしくは A^T と表します）を ${}^tA=(a_{ji})$ で定義します. この行列は行列 A の行と列の立場を入れ替えた行列となっていることが分かります. このとき以下の性質が成り立ちます.

- ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
- ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$

この証明も簡単なので略します.

また,$A={}^tA$ が成り立つ行列を **対称行列**,$A=-{}^tA$ が成り立つ行列を **交代行列** といいます.

2.4　逆行列の定義と計算法

行列 A（正方行列, つまり行と列の数が等しいとします）[4]に対してが

$$AB=BA=E\,(E\text{ は単位行列}) \tag{1}$$

成り立つとき B を **逆行列** といい,A^{-1} で表します.

です. ではせっかくさっき連立一次方程式の解き方をやったのでそれを使って説明していこうと思います.
まず連立一次方程式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ として, 両辺に左から逆行列をかけると,(この逆行列が存在することは自明ではないのですが, 一般に逆行列が存在するか判定する方法は後で説明するのでこの場合は存在するとことを前提として話を進めていきます)
$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}$ となります.
つまり逆行列を求めるということは方程式を解いて,$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ で表すということに対応します. つまり先ほど紹介した一次方程式の解き方である掃き出し法を利用して逆行列を求められそうです. では具体的な問題でやり方を考えていきましょう

行列 A を
$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&1&0\\-5&1&2\end{pmatrix}$ としてこの逆行列を求めてみます. まず, 先ほどの連立方程式の形で考えていきます. つまり

[4] (m,n) 行列にも定義される一般逆行列というものもありますが, この文章では扱いません

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

を解いてみましょう.
まずこの式は

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

です. まず 2,3 番目の式から x_1 を消去して

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad = y_1 \\ \qquad -2x_2 + x_3 = -2y_{1+}y_2 \\ \qquad -x_2 + x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1,3 番目の式から x_2 を消去して,

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = -y_1 + y_2 \\ \qquad -2x_2 + x_3 = -2y_1 + y_2 \\ \qquad\qquad x_3 = -y_2 + 2y_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1,2 番目の式から x_3 を消去して,

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ \qquad -2x_2 \qquad = -2y_1 + 2y_2 - y_3 \\ \qquad\qquad x_3 = -y_2 + 2y_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

最後に 2 番目の式を -2 で割って

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ \qquad x_2 \qquad = y_1 - 1y_2 + y_3 \\ \qquad\qquad x_3 = -y_2 + 2y_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

となります. これをみていると二つのベクトル $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ は逆行列を求めるときには本質的に不要であることが分かります. なので以下のようにやっていけばよいことがわかります.
連立方程式を解いたときのように拡大係数行列 $(A|E)$ を考えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とします. これに行基本変形をほどこして, 最終的に左半分を単位行列に変形する.
そして右に残った行列が逆行列となります.

まとめ

逆行列 A^{-1} の求め方は
A と単位行列 E を並べて, 拡大係数行列 $(A|E)$ の形をつくり, 掃き出し法を用いることにより最終的に $(I|B)$ の形にもっていく. このとき B が求める逆行列 A^{-1} である.[a]

[a]行基本変形によって一次方程式の解や逆行列を求めるとき, 行列の成分に分数が現れることがあります. そういったときは, その行を定数倍することによってすべての成分を整数にして計算したほうが計算ミスしにくいです. また, 解が求まったら必ず検算をしましょう.

2.5 逆行列の性質

逆行列の基本的な性質としては,

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

があります.

さて, 逆行列が存在するとき必ず一つしかないことを示します.
これは実はかなり簡単で,A の逆行列が二つあったと仮定して矛盾を導きます. この逆行列を $A^{-1}, \tilde{A}^{-1}$ とします. このとき行列 $Z = A^{-1}A\tilde{A^{-1}}$ を考えると,$Z = (A^{-1}A)\tilde{A^{-1}}$ と考えると $Z = \tilde{A^{-1}}$ となり,$Z = A^{-1}(A\tilde{A^{-1}})$ と考えると $Z = A^{-1}$ となります. よって $Z = A^{-1} = \tilde{A^{-1}}$ となり矛盾します. よって逆行列は一つしかありません.

ところで先の章で具体的に逆行列を求めたときに,「逆行列の定義は $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ なのに, さっきの考え方では（さっき求めた行列を B とすると）$BA = E$ は成立するのは確かだが,$AB = E$ は本当に成立するの ？」と思うかも知れません. ここのところをはっきりさせておきましょう.
つまり示したいことは $BA = E \Leftrightarrow AB = E$ です. もしもこれが成立すれば先程の逆行列の計算がちゃんと正当化される上, 逆行列の条件を緩められることが分かります.(証明は省略します．)

では, 一般の逆行列はいったいどのような形をしているのでしょうか ？ これを解決するには一般の行列式についての知識が必要なので, この疑問は行列式の章で考えることにします.

3　線形写像としての行列

3.1　線形写像について

　まず線形写像の説明をする前に、まず写像とはなにか ？ 説明します。
写像とは関数の概念を一般化したものです。そもそも関数は（面倒なので関数を $y = f(x)$ とおく）x というある値である入力に対して、ただひとつの出力 y を返すものです。そしてその x と y のを結ぶ関係が f です。では写像とは何かと言うと、簡単に言えば x も y も何でもよいということです。例えばベクトルでも OK です
"X から Y への写像 f"を表すのに $f : X \to Y$ と書きます.
　ではどんな性質をもった写像が線形写像と呼ばれるかというと、ある写像を ψ として

$$\psi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \psi(\boldsymbol{a}) + \psi(\boldsymbol{b}) \tag{2}$$

$$\psi(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \psi(\boldsymbol{a}) \tag{3}$$

という性質を満たすとき線形写像（線形変換）と呼びます。($\boldsymbol{a}$ のように太文字のアルファベットはベクトルを表すとします) この性質を「**線形性**」といって重要な性質なので覚えといておいてください。

　さて $\boldsymbol{R^n}$ から $\boldsymbol{R^m}$ への線形写像（つまり先ほどの x にあたるものが n 次元ベクトルで、y にあたるものが m 次元ベクトルで、線形性をみたす写像のこと）が行列で表される（さっきの f にあたるものが行列で表されるということ）を示そしましょう

　証明　ψ を $\boldsymbol{R^n}$ から $\boldsymbol{R^m}$ への線形写像とする。$\boldsymbol{R^n}$ の標準基底 $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ を ψ でうつした列ベクトルを $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_n}$ とし、それらをこの順に並べた (m, n) 行列（←行が m 行、列が n 列ある行列）を A とおく。つまり

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & .... & \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ : & : & : & : \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

と表される。さて $\boldsymbol{R^n}$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は、$\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ の一次結合で表される。つまり

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{e_1} + x_2 \boldsymbol{e_2} + ... + x_n \boldsymbol{e_n} \tag{5}$$

ここで ψ の線形性から

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(x_1\boldsymbol{e_1}+x_2\boldsymbol{e_2}+.....+x_n\boldsymbol{e_n}) = x_1\psi(\boldsymbol{e_1})+...+x_n\psi(\boldsymbol{e_n}) = x_1\boldsymbol{a_1}+...+x_n\boldsymbol{a_n} = A\boldsymbol{x} \tag{6}$$

となる

またこのAが一意に定まることを示す。もし、$\psi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ と表示されたと仮定する。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$ に対し
$(A-B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。このとき $\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{e_1}$,...,$\boldsymbol{e_n}$ とそれぞれおくと、$A = B$ のすべての列ベクトルが $\boldsymbol{0}$ であることが分かる。よって、$A - B = 0$ であることが分かる。よって線形変換 ψ はつねに一意的に行列で表現されることが分かった。(このとき、「ψ の表現行列は A である」とかいいます)

さて線形写像 ψ_1、ψ_2 の表現行列を A_1, A_2 とそれぞれおく。このとき $\psi_1 + \psi_2$ の表現行列が $A_1 + A_2$、$\lambda\psi_1$ の表現行列を λA_1 と表される。また、$\boldsymbol{x}$ を ψ_1 で写し、次にその結果を psi_2 で写す写像を合成写像といい、$\psi_2 \circ \psi_1$ で表すとする。このとき $\psi_2 \circ \psi_1$ の表現行列は A_2A_1 であることを示す。

証明 まず $(\psi_1 + \psi_2)(\boldsymbol{x}) = \psi_1(\boldsymbol{x}) + \psi_2(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + A_2\boldsymbol{x} = (A_1 + A_2)(\boldsymbol{x})$ となるので $\psi_1 + \psi_2$ の表現行列が $A_1 + A_2$ であることが分かる。
次に $(\lambda\psi_1)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\psi_1(\boldsymbol{x})) = \lambda A_1(\boldsymbol{x}) = (\lambda A_1)(\boldsymbol{x})$ となるので $\lambda\psi_1$ の表現行列が λA_1 であることが分かる。

最後に合成写像について示す。$(\psi_2\circ\psi_1)(\boldsymbol{x}) = \psi_2(\psi_1(\boldsymbol{x})) = \psi(A_1(\boldsymbol{x}) = A_2(A_1(\boldsymbol{x})) = (A_2A_1)\boldsymbol{x}$ より合成写像 $\psi_2 \circ \psi_1$ の表現行列は A_2A_1 であることが分かる。

以上のことから行列の和や積の線形変換での役割が分かったと思います。

3.2 単射と全射

(線形) 写像の重要な性質として**単射性**と**全射性**があります.（もちろんすべての線形写像が単射であったり全射であるというわけではありませんが.）まずは単射と全射の定義です.

- 写像 $f : X \to Y$ が単射 $\Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

- 写像 $f : X \to Y$ が全射 $\Leftrightarrow f(X) = Y)$

です．($x_1, x_2 \in X$ です.)
単射はYのある要素yに対応してるXの要素にダブりが無い，全射(Im(f)=Y) Xの全要素とYの全要素が対応しているといった感じです．単射かつ全射である写像を**全単射**と言います．全単射となっているときXの要素とYの要素がすべて１対１に対応しています．線形写像については一般に 単射 $\Leftrightarrow$ 全射 が成立します．(証明略)

4　行列式

4.1　三次の正方行列の行列式の定義

高校では二次の正方行列の行列式についてのみ行列式の学習をしたわけです. ではそれを一般化して n 次の正方行列における行列式を定義して, 一般式を求め応用しようというのがここの章での目標です. ではまずは二次正方行列における行列式がどういったものであったかを復習しましょう. 二次の正方行列において行列式は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定義されていました。この図形的な性質は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の符号付きの面積として理解できます.

このとき符号の付け方は $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の右回りにあるときプラス，左回りにあるときにはマイナスをつけるというようになっています.

では三次の正方行列の行列式はどのように定義するのが自然であるかと考えると，それは三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によって張られる平行六面体の (符号付の) 体積として定義するのが自然に感じられます．ということでこのように定義して三次正方行列の行列式はどのような一般式を持つのでしょうか ?

まず $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積は，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさです. (もちろん $\times$ はベクトルの外積です.) よってこんどは平行四辺形を底面としたときの平行六面体の高さが分かれば，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさにその高さをかけることで平行六面体の体積が求まります．さてこの高さを求めるには，ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が，底面である平行四辺形に垂直であることを利用します．($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ とおきます．)
さてここで $\boldsymbol{d} \bullet \boldsymbol{c}$ を考えると，"$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{d}$ の方向にに正射影したとベクトルの長さ" と，"$\boldsymbol{d}$ の長さ" の (符号付の) 積になります．(内積の幾何学的な意味を思い出しましょう) さて，"$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{d}$ の方向にに正射影したとベクトルの長さ" は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形を底面としたときの平行六面体の高さであり，"$\boldsymbol{d}$ の長さ" は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形の面積なので,$\boldsymbol{d} \bullet \boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によって張られる平行六面体の (符号付の) 体積となっていることが分かります.

さて，これを計算すると,

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \text{ として,}$$
$$detA = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2$$

となります.

これにより三次以下の正方行列の行列式の一般式が求まりました。(これは**サラスの公式**と呼ばれたりします．簡単な覚え方は教科書参照．まぁ図を描くのが面倒なだけなんですけどね…)

では四次以上の正方行列の行列式をどのように定義するのがよいでしょうか？さきほどのように考えて $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の張る ’立体 ’の ’体積の一次元高い量 ’と定義するのは、定義したところで全く意味が分からないので、他の方法で一般化するしかなさそうです。

ちょっとここら辺でいったん区切りをつけましょう.

まとめ

二次の行列式

$detA = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

三次の行列式

$detA = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2$

4.2 一般の行列の行列式の定義

先程の章で述べたように，このままでは一般化しにくいので行列式の幾何的な解釈はあきらめます．ではどう考えるかというと行列式を、行列 A（$= (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}.....\boldsymbol{a_n})$ とおく。それぞれは列ベクトルです。）を入れると実数を返す関数と考えてその代数的な性質に注目して定義しましょう。二次の正方行列も三次の正方行列も以下の性質を満たします。

- 多重線形性

$$f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{\lambda a_i} + \boldsymbol{\mu \acute{a}_i}, .., \boldsymbol{a_n}) = \lambda f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_i}, .., \boldsymbol{a_n}) + \mu f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{\acute{a}_i}, .., \boldsymbol{a_n})$$

- 交代性

$$f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_i}, ..., \boldsymbol{a_j}, .., \boldsymbol{a_n}) = -f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_j}, ..., \boldsymbol{a_i}, .., \boldsymbol{a_n})$$

- 正規性

$$f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}...\boldsymbol{e_n}) = detE = 1$$

(ただし，$\boldsymbol{e_i}$は, i 番目の成分のみ 1 で，そのほかの成分が 0 であるベクトルとします．)

以上の３つの性質を二次と三次の行列式が満たすことが分かります。では、これを行列 A の行列式と定義したとき、この性質を満たすものが本当に一意的に定まるのでしょうか？ 存在するとしたら一般式はどういった形になっているのでしょうか？ こういったことをまずは議論していきたいと思います。

まず,

$$\boldsymbol{a_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{e_k}$$

となるので，多重線形性を用いて，

$$\begin{aligned} detA &= f(\boldsymbol{a_1, a_2 .....a_n}) \\ &= f(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\boldsymbol{e_{i_1}}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e_{i_n}}) \end{aligned}$$

多重線形性を用いて，

$$\begin{aligned} detA &= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\ f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e_{i_n}}) \\ &= \sum_{i_n=1}^{n} ... \sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}...a_{i_n n}\ f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \boldsymbol{e_{i_n}}) \end{aligned} \tag{7}$$

一応これを公式としてもよいのですがこの公式だと無駄が多いのです．なぜなら一般に行列 A に同じ列があったとき (ここでは i 列目と j 列目 が同じ列であるとします．)
このとき，交代性から

$$\begin{aligned} detA &= f(\boldsymbol{a_1, ..., a_i, ..., a_i, ..., a_n}) \\ &= -f(\boldsymbol{a_1, ..., a_i, ..., a_i, ..., a_n}) \\ &\text{よって},\ f(\boldsymbol{a_1, ..., a_i, ..., a_i, ..., a_n}) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので，先程に式において $i_1 = i_2$ のように $i_p = i_q$ が成立すると 0 になるので，0 をたくさん足すことになるからです.
たとえば $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} detA &= \sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_1=1}^{2} a_{i_1 1}a_{i_2 2}f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}) \\ &= a_{11}a_{12}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) + a_{11}a_{22}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) + a_{21}a_{12}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) + a_{21}a_{22}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) \end{aligned} \tag{8}$$

$$= a_{11}a_{22}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) - a_{21}a_{12}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) \tag{9}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{10}$$

先程の議論から (3) で第 1 項と, 第 4 項が 0 になります．また (4) では正規性のよって (4) が得られます．このように値が 0 である無駄な項がたくさん出てくるの

で，もっとすっきりした公式を得たいと考えます.(当たり前ですが，ちゃんと (5) で二次の正方行列の行列式の公式が得られていますね！)

ここで唐突ですが，**置換**と **sgn** の定義をします。(もちろんすっきりした公式を得るために必要なのです．) たとえば (1 2 3) と数字が三つ並んでいるものを (1 3 2) にのように数字を入れ替える操作を置換といいます．もちろん数字の位置を入れ替えるだけなので先ほどの例でいえば (1 4 2) などといったように新しい数が出てきてはいけません. また, 数字の位置の対応関係だけに注目するので,(1 2 3) → (1 3 2) という置換と,(3 2 1) → (3 1 2) という置換は同じです. では今度は sgn を定義します．まず (1 2 3) から (1 3 2) にする置換が与えられたとき,(1 2 3) から (1 3 2) にするのに必要な，二つの数を入れ替えた回数を r とすれば

$$sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = sgn\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^r = -1 \tag{11}$$

のように定義されます．一般に置換を σ と表すとき $sgn\sigma$ と表します．本当に sgn が一意の値をとるのか ? という疑問が残るかもしれませんが, （ここでもたもたして流れを切るよりも, 行列式の一般式の話を一回終わらせた方が分かりやすいと思うので）一意に定まることをとりあえずここでは認めて前に進みましょう.(sgn の一意性の証明は省略します．教科書に書いてあるので読んでおいてください．)

数式番号 (2) から，

$$detA = \sum_{i_n=1}^{n} ... \sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}...a_{i_n n}\ f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \boldsymbol{e_{i_n}})$$

であり，無駄な値が 0 である項がでないように i_k がすべて異なるときを考えます (もしも同じものがあったらその項は 0 になる)．よって，$(i_1, i_2, ..., i_n)$ は $(1, 2, ..., n)$ を並び替えたものとなります．(これはまさに置換がかかわりそうですね！)$(i_1, i_2, ..., i_n)$ が $(1, 2, ..., n)$ を並び替えたものすべてを動くときの和を $\sum\limits_{(i_1,i_2,...,i_n)}$ と表すことにすると，先程の式は

$$detA = \sum_{(i_1,i_2,...,i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}...a_{i_n n}\ f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \boldsymbol{e_{i_n}}) \tag{12}$$

これでは多少分かりにくいのですね.$f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \boldsymbol{e_{i_n}})$ が $f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}) = f(E) = 1$ の何倍であるかを考えます．交代性から $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$ において，二つのベクトルを入れ替えていって最終的に $(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \boldsymbol{e_{i_n}})$ にするのに必要な回数を r とおくと $f(\boldsymbol{e_{i_1}}, \boldsymbol{e_{i_2}}, ..., \boldsymbol{e_{i_n}}) = (-1)^r \times f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}) = (-1)^r$ となります．これってまさに置換ですね！
つまり $(1, 2, ..., n) \to (i_1, i_2, ..., i_n)$ という置換を σ とおくと $(-1)^r = sgn\,\sigma = sgn(i_1, i_2, ..., i_n)$

となることが分かります.
これを (7) に代入して, 最終的に

$$detA = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} sgn\,(i_1, i_2, ..., i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}$$

を得ます.

ついに一般の行列式の公式が完成しました！今までの計算過程から（sgn が一意に定まることを仮定すれば）確かに行列式が一意に定まることは明らかです。

以上の議論から行列式を列ベクトルで定義しても、行ベクトルで定義しても同じ値をとることが分かります。
とはいうものの、これを用いて計算しようとすると n 次正方行列の行列式を求めようとすると $n!$ 個もの項を計算しなくてはならないのでとても不便で使いにくいです。では次の章では、もっと実践的な行列式の求め方について考えましょう。

まとめ

$$detA = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} sgn\,(i_1, i_2, ..., i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}$$

4.3 行列式の実践的な求め方

4.3.1 行列式の基本的な性質

まずは行列式の定義を用いることによって基本的な性質を導きましょう。
まず考えること行列 A に対して列の基本変形を施したとき、行列式の値はどのように変化するのでしょうか。i 列目に j 行目を λ 倍したものを足した行列式つまり

$$f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{\lambda a_j}, ..., \boldsymbol{a_j}.., \boldsymbol{a_n})$$

を考えてみます。行列式の性質のひとつである多重線形性によりこれは

$$f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_i}, ...\boldsymbol{a_j}, .., \boldsymbol{a_n}) + \lambda f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_j}, ..., \boldsymbol{a_j}.., \boldsymbol{a_n})$$

に等しいことが分かります。第二項はでは前に議論したように i 列目と j 列目が等しいときの行列式のは 0 になるので結局

$$\begin{aligned} detA &= f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_i}, .., \boldsymbol{a_j}.., \boldsymbol{a_n}) \\ &= f(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{\lambda a_j}, ..., \boldsymbol{a_j}.., \boldsymbol{a_n}) \end{aligned}$$

となります．つまり i 列目に j 行目を λ 倍したものを足したても行列式の値は変化しないことが分かります。

では次に

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{22} \\ : & : & & : \\ 0 & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のようなの行列式を考えてみたいと思います。(行列の一列目の第一成分以外 0) 行列式の全展開公式をこれに適用しましょう．

$$detA = \sum_{(i_1,i_2,...,i_n)} sgn\,(i_1,i_2,...,i_n)\,a_{i_11}a_{i_22}...a_{i_nn}$$

において,i_1 が 1 でないと．$a_{i_11}=0$ となるので $i_1=1$ を考えれば十分です．よって

$$\begin{aligned} detA &= a_{11}\sum_{(1,i_2,...,i_n)} sgn\,(1,i_2,...,i_n)\,a_{i_22}...a_{i_nn} \\ &= a_{11}\sum_{(i_2,...,i_n)} sgn\,(i_2,...,i_n)\,a_{i_22}...a_{i_nn} \end{aligned}$$

となることが分かります。つまり $detA = a_{11} \times$ (”行列 A から一列目と一行目を取り除いた行列” の行列式) です.

基本変形によってうまくある列の一成分以外 0 にすることができれば行列の大きさを小さくすることができるので行列式の計算が楽になります。

4.3.2 転置行列の行列式

では先ほど求めた公式は列ベクトルについての公式でしたが、行ベクトルについてはどうなるのでしょうか？ まず先ほどの公式は各列ベクトルから成分を一つずつ取り出してきたものですが、そこにでてきた $a_{i_11}a_{i_22}...a_{i_nn}$ を並び替えることで $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ とすることができます。ここで $(j_1,j_2,...,j_n)$ は，置換 $(i_1,i_2,...,i_n)\rightarrow(1,2,...,n)$ を $(1,2,.$ ほどこしたものです.

(つまり置換 $(1,2,...,n)\rightarrow(i_1,i_2,...,i_n)$ の逆置換です.)

例えば $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}((i_1,i_2,i_3,i_4) = (2,4,1,3)$ です) としてこれを並び替えると $a_{31}a_{12}a_{43}a_{24}((j_1,j_2,j_3,j_4)=(3,1,4,2)$ です) となります．さて置換 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ を $(1,2,3,4)$ にほどこすと，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ となります．確かにこうなっていますね！

また sgn の方はどうなっているかというと，$sgn(i_1, i_2, ..., i_n) = sgn(j_1, j_2, ..., j_n)$ が成立します．なぜかというと $(1, 2, ..., n)$ から $(i_1, i_2, ..., i_n)$ にするときに行った二つの数の入れ替えを，逆の順番に行えばこれがまさに逆置換に相当します．だから $(1, 2, ..., n)$ から $(i_1, i_2, ..., i_n)$ にするときに行った二つの数の入れ替えの回数をr回とおくと $(i_1, i_2, ..., i_n)$ から $(1, 2, ..., n)$ にするときに行った二つの数の入れ替えの回数も r 回となります．つまり $sgn(i_1, i_2, ..., i_n) = sgn(j_1, j_2, ..., j_n)$ が成立します．

よって行列式の展開公式を以下のように変形することができます。

$$\begin{aligned} detA &= \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} sgn\,(i_1, i_2, ..., i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n} \\ &= \sum_{(j_1, j_2, ..., j_n)} sgn\,(j_1, j_2, ..., j_n)\, a_{1 j_1} a_{2 j_2} ... a_{n j_n} \end{aligned}$$

a_{kj_k} は行列 A の転置行列 ${}^tA$ の (j_k, k) 成分となっているので，行列 A の転置行列 ${}^tA$ の行列式が行列 A の行列式と一致することが分かります。考えてみると，${}^tA$ の行列式が一致するということは、行列 A を行について変形することで得た行列式と、列について変形することで得た行列式が等しいことを示しています。つまり行列式を求めるとき、行列を行に関する変形と列関する変形を混ぜて変形してよいことが分かります。

以上をまとめると行列式を求めるとき行または列の基本変形を行うことによって

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のような形に持っていき行列の大きさを小さくしていけば行列式が（公式をそのまま適用するよりも）簡単に求めることができます。

4.3.3　行列式の乗法性

書く場所が見当たらないのでここに書いておきます．ここで示したいことは

$$det(AB) = detA \cdot detB$$

です．これを証明しましょう．$det(AB)$ において A を固定して B を変数とみましょう. これを $f(B)$ とおくと，

- $f(E) = detA$
- $f(B)$ は行列の公理を満たす（証明は簡単なので略）

が成立するので行列式の全展開公式を求めたときにした議論により,

$$f(B) = f(E) \cdot detB = detA \cdot detB \tag{13}$$

となり証明されました.

4.3.4 ブロック行列の行列式

$$det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = detA \cdot detB$$

を証明しましょう.

まず $det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ を B を固定して A を変数とみて $f(A)$ とおきます. このとき $f(A)$ は列ベクトルに関しての行列式の公理を満たすので（証明略）

$$det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = detA \cdot f(E)$$

ここで $f(E) = det \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ です. こんどは行列 B を変数とみます. このとき $f(E)$ は行ベクトルに関する行列の公理を満たす (証明略) ので $f(E) = detB \cdot det \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$ となります。ここで $det \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ は 1 になる.（$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ : & : & & : \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ : & & : \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ となるため）よって $f(E) = detB$ となるので

$$det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = detA \cdot detB$$

が示されました.

まとめ

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を求めるには，行の基本変形や列の基本変形を行うことによって

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の形にし

$$detA = a_{11}det\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のようにして，行列を小さくしていけばよい．

$$det(AB) = detA \cdot detB$$

$$det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = detA \cdot detB$$

が成立する。

4.4 余因子行列

2 章で逆行列の具体的な計算法について学んだわけですが、一般の逆行列はどのような形になるのでしょうか。そのために余因子行列を定義します．行列 A から i 行目と j 列目取り去って得られる行列を A_{ij} と表すことにします．このとき余因子 $\tilde{a_{ij}}$ を $\tilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j}detA_{ij}$ と定義します．
また余因子行列 $\tilde{A}$ を余因子を並べた行列の転置行列として定義します．つまり

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \tilde{a}_{11} \\ & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \tilde{a}_{11} \end{pmatrix}$$

です．さてこのとき以下の性質が成立します．

- $a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + ... + a_{in}\tilde{a}_{in} = detA$
- $i \neq k$ のとき $a_{k1}\tilde{a}_{i1} + a_{k2}\tilde{a}_{i2} + ... + a_{kn}\tilde{a}_{in} = 0$
- $a_{1i}\tilde{a}_{1i} + a_{2i}\tilde{a}_{2i} + ... + a_{ni}\tilde{a}_{ni} = detA$
- $i \neq k$ のとき $a_{1k}\tilde{a}_{1i} + a_{2k}\tilde{a}_{2i} + ... + a_{nk}\tilde{a}_{ni} = 0$

これを証明しましょう.
まず一つ目の式を示しましょう.

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ : & & & & : \\ a_{i1} & & & & a_{in} \\ : & & & & : \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$= a_{i1} det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ : & & & & : \\ 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ : & & & & : \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} + ... + det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ : & & & & : \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ : & & & & : \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$= (-1)^{(i-1)} a_{i1} det \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ : & & & & : \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{(n-1+i-1)} a_{in} det \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & ... & 1 \\ a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ : & & & & : \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$= (-1)^{(i+1)} a_{i1} detA_{i1} + ... + (-1)^{(n+i)} a_{in} detA_{in} \tag{17}$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + ... + a_{in}\tilde{a}_{in} \tag{18}$$

となります. (9) から (10) には多重線形性を, (10) から (11) には交代性を,(11) から (12) には前の章に求めた公式を使っています. (12) から (13) には $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$ という定義を用いています.

こんどは二つ目の式の証明です．($i \neq k$ とします)

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を考えます．この行列は i 行目に k 行目 と同じであるとします．(上を i 行目，下を k 行目とします) そして前の章で議論したようにこの行列式は 0 となります．

先程のようにこの式を変形していきましょう.

$$0 = det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{k1} det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} + ... + a_{kn} det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{(i-1)} a_{k1} det \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{(k-1+n-1)} a_{kn} det \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & & & & a_{kn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{(i+1)} a_{k1} det A_{i1} + ... + (-1)^{(k+n)} a_{kn} det A_{in}$$

$$= a_{k1}\tilde{a}_{i1} + a_{k2}\tilde{a}_{i2} + ... + a_{kn}\tilde{a}_{in}$$

よって $a_{k1}\tilde{a}_{i1} + a_{k2}\tilde{a}_{i2} + ... + a_{kn}\tilde{a}_{in} = 0$ が証明されました。

あと二つの式は行と列を入れ替えた議論によって同様に証明できるので省略します.

さて，$\tilde{A}A, A\tilde{A}$ を考えると先程の性質より

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = (detA)E \tag{19}$$

となります．よって

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\tilde{A} \tag{20}$$

となります．(これから $detA \neq 0$ が A^{-1} が存在することの必要十分条件であることが明らかです．)

まとめ

$\tilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$
$\tilde{A} = (\tilde{a_{ji}})$
として,$\tilde{A}$を余因子行列という.
$A^{-1} = \frac{1}{detA}\tilde{A}$
となります.

4.5 Cramer の公式

この章で示したいことは

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の解は
$x_i = \frac{1}{detA} det(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{b}, ..., \boldsymbol{a_n}$となる.
(det の中の$\boldsymbol{b}$は i 番目, また $detA \neq 0$ とします)

です．証明はいたって簡単で連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に逆行列 A^{-1} をかけることで $\boldsymbol{x} = \frac{1}{detA}\tilde{A}\boldsymbol{b}$ を得ます．$\tilde{A}\boldsymbol{b}$ の i 成分は

$$b_1\tilde{a}_{1i} + ... + b_n\tilde{a}_{ni}$$

これが $det(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{b}, ..., \boldsymbol{a_n}$ と一致することを示せばよいのですが，これは余因子の性質を証明したときに用いた変形を用いるだけなので省略します．まぁぜひやってみてください.

まとめ

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の解は
$x_i = \frac{1}{detA} det(\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{b}, ..., \boldsymbol{a_n}$となる.
(det の中の$\boldsymbol{b}$は i 番目, また $detA \neq 0$ とします)